Θεώρημα: Ολοκλήρωση κατά μέλη ή κατά παράγοντες ή παραγοντική ολοκλήρωση.

Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες ώστε οι f', g' ολοκληρώσιμες.

Τότε $\forall x\in[a,b]$: $\int_a^x f(t)g'(t)dt = \left(f(x)g(x) - f(a)g(a)\right) - \int_a^x f'(t)g(t)dt$.

Ειδικότερα, $\int_a^b f(t)g'(t)dt = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$.

Απόδειξη:

Η fg είναι παραγωγίσιμη με $(fg)' = f'g + fg'$

Από την υπόθεση οι $f'g, fg'$ είναι παραγωγίσιμες άρα και η $(fg)'$.

$$\int_a^x f'(t)g(t)dt + \int_a^x f(t)g'(t)dt = \int_a^x (fg)'(t)dt \overset{\text{2ο θεμ. θεωρ.}}{\underset{\text{απειρ. λογ.}}{=}} f(x)g(x) - f(a)g(a)$$

Από αυτό προκύπτει η εξίσωση που θέλατε.

Για $x=b$ προκύπτει το άλλο ζητούμενο.

Παραδείγματα:

1) $\int \underset{f(x)}{x}\,\underset{g(x)}{e^x}\,dx = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int x'e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x(+c)$.

Επαλήθευση: $(x\cdot e^x - e^x + c)' = 1e^x + x\cdot e^x - e^x + 0 = x\cdot e^x$

2) $\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'dx = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx = x\sin x - (-\cos x)(+c)$.

Επαλήθευση: $(x\sin x + \cos x + c)' = 1\sin x + x\cos x - \sin x + c = x\cos x$.

3) $\int x\sin x\,dx = \int x(-\cos x)'dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx =$

$= -x\cos x + \sin x(+c)$.

4) $\int \log x\,dx = \int (x)'\log x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx = x\log x - x(+c)$.

5) $\int \frac{1}{x}\log x\,dx = \int (\log x)'\log x\,dx = \log^2 x - \int \log x\cdot\frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{x}\log x\,dx = \frac{1}{2}\log^2 x(+c)$.

6) $\int e^x \sin x\,dx$.

<u>α' τρόπος:</u> $\int e^x\sin x\,dx = \int (e^x)'\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int (e^x)'\cos x\,dx = e^x\sin x - \left(e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx\right) = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x \Rightarrow \int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}(e^x\sin x - e^x\cos x)(+c)$

<u>β' τρόπος:</u> $\int e^x\sin x\,dx = \int e^x(-\cos x)'\,dx = -e^x\cos x - \int (e^x)'(-\cos x)\,dx =$

$= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx = -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}(e^x\sin x - e^x\cos x)(+c)$.

7) $I = \int(\log x)^2dx = \int \log x\log x\,dx$

Είχαμε δει νωρίτερα ότι $\int \log x\,dx = x\log x - x + c$

Έτσι: $\int (x\log x - x)'\log x\,dx = (x\log x - x)\log x - \int (x\log x - x)\cdot\frac{1}{x}\,dx =$

$= (x\log x - x)\log x - \int(\log x - 1)\,dx = x(\log x)^2 - x\log x - (x\log x - x) + x(+c) =$

$= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x(+c)$.

• $\int P(x)e^{ax}dx$: Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση $\left(\frac{1}{a}\cdot e^{ax}\right)' = e^{ax}$ αναγόμαστε σε ολοκληρώματα αντίστοιχης μορφής έχοντας υποβιβάσει κατά ένα το βαθμό του πολυωνύμου. Μετά από n βήματα, όπου n=deg(P), καταλήγουμε σε αποτέλεσμα.

8) Ολοκληρώματα της μορφής $\int P(x)\cos(ax+b)\,dx$ ή $\int P(x)\sin(ax+b)\,dx$

Κάνοντας παραγοντική ολοκλήρωση ως προς τον τριγωνομετρικό παράγοντα $\cos(ax+b) = \left(\frac{1}{a}\sin(ax+b)\right)'$, $\sin(ax+b) = \left(-\frac{1}{a}\cos(ax+b)\right)'$ εμφανίζεται ολοκλήρωμα αντίστοιχης μορφής όπου ο βαθμός του πολυωνύμου έχει υποβιβαστεί κατά ένα. Με n=deg(P(x)) βήματα βρίσκουμε το αποτέλεσμα.

9) Ολοκληρώματα της μορφής $\int e^{kx}(\sin(ax+b))\,dx$ ή $\int e^{kx}(\cos(ax+b))\,dx$

Κάνοντας δύο φορές παραγοντική ολοκλήρωση ως προς τον εκθετικό παράγοντα (ή δύο ως προς τον τριγωνομετρικό παράγοντα) εμφανίζεται το αρχικό ολοκλήρωμα ξανά. Λύνοντας μια εξίσωση, υπολογίζεται το αποτέλεσμα.

Θεώρημα: Ολοκλήρωση με αντικατάσταση (1η μορφή).

Έστω $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ώστε η g' να είναι ολοκληρώσιμη.
Αν $I=g([a,b])$ και $f: I\to\mathbb{R}$ συνεχής ώστε:

$$\int_a^b f(g(t))\cdot g'(t)\,dt=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Απόδειξη:

I κλειστό διάστημα (αφού g συνεχής σε κλειστό διάστημα).

Η f είναι συνεχής, άρα είναι ολοκληρώσιμη στο I. Έστω, $F(x)=\int_{g(a)}^{x} f(u)\,du$.

Γνωρίζουμε ότι $F'=f$.

$(F\circ g)'=(F'\circ g)\cdot g'=(f\circ g)\,g'$

ολοκληρώσιμη (ως γινόμενο ολοκληρωσίμων)

$$\int_a^b f(g(t))\cdot g'(t)\,dt=\int_a^b (F\circ g)'(t)\,dt=F(g(b))-F(g(a))$$

Επίσης, $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du=\int_{g(a)}^{g(b)} F'(u)\,du=F(g(b))-F(g(a))$.

Σημείωση: Όταν εφαρμόζουμε το παραπάνω θεώρημα, λέμε:

Θέτω $u=g(t)$ οπότε $du=g'(t)\,dt$.

Για $t=a \Rightarrow u=g(a)$.

Για $t=b \Rightarrow u=g(b)$.

Παραδείγματα:

1) $I=\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,dx=\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}(\sin x)'\,dx$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα αντικατάστασης για $f(x)=e^x$, $g(x)=\sin x$:

$$I=\int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/2)} e^x\,dx=[e^x]_0^1=e^1-e^0=e-1.$$

Μια άλλη ορολογία: Θέτω $y=\sin x$ άρα $dy=\cos x\,dx$.

Για $x=0 \Rightarrow y=0$

Για $x=\pi/2 \Rightarrow y=1$

$I=\int_0^1 e^y\,dy=\dots=e-1.$

2) $I = \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

Θέτουμε $y = \arctan x$

$dy = \frac{1}{1+x^2} dx$

$\int y\, dy = \frac{y^2}{2} + c$

Έτσι, $I = \frac{(\arctan x)^2}{2} + c$.

3) $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

Θέτουμε $y = \cos x$

$dy = (-\sin x) dx$

Έτσι, το αρχικό ολοκλήρωμα ανάγεται στο εξής: $-\int \frac{1}{y} dy = -\log|y| + c$.

Συνεπώς: $\int \tan x\, dx = -\log(|\cos x|) + c$.

4) $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

Θέτουμε $y = \sqrt{x}$

$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

Έτσι, το αρχικό ολοκλήρωμα ανάγεται στο εξής: $2\int \cos y\, dy = 2\sin y + c$

Συνεπώς: $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})} dx = 2\sin\sqrt{x} + c$.

5) $\int_a^b \sin^{17} x \cos x\, dx$

Θέτουμε $y = \sin x$

$dy = \cos x\, dx$

$x = a \Rightarrow y = \sin a$

$x = b \Rightarrow y = \sin b$

$I = \int_{\sin a}^{\sin b} y^{17} dy = \left[\frac{y^{18}}{18}\right]_{\sin a}^{\sin b} = \frac{(\sin b)^{18}}{18} - \frac{(\sin a)^{18}}{18}$.